UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CCSE

CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ELEMENTARES

Rubens Vilhena Fonseca

Marília Brasil Xavier
REITORA

Prof. Rubens Vilhena Fonseca
COORDENADOR GERAL DOS CURSOS DE MATEMÁTICA

UEPA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

MATERIAL DIDÁTICO

EDITORAÇÃO ELETRONICA

Odivaldo Teixeira Lopes

ARTE FINAL DA CAPA

Odivaldo Teixeira Lopes

REALIZAÇÃO

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F676e Fonseca, Rubens Vilhena
Equações diferenciais elementares / Rubens Vilhena Fonseca – Belém: UEPA / Centro de Ciências Sociais e Educação, 2011.
48 p.; il.

ISBN: 978-85-88375-61-1

1.Equações diferenciais. I. Universidade Estadual do Pará. II. Título.

CDU: 517.9
CDD: 515.35

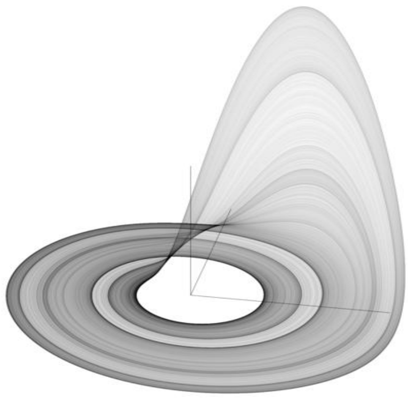
Índice para catálogo sistemático
1. Equações diferenciais: 517.9

Belém - Pará - Brasil

- 2011 -

SUMÁRIO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS 7
INTRODUÇÃO 7
DEFINIÇÕES 7
Equação Diferencial Ordinária 7
Equação Diferencial de Derivadas Parciais 8
Ordem da Equação Diferencial 8
SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL 8
CAMPO DE DIREÇÕES 10
1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM 11
1.1 SOLUÇÃO POR INTEGRAÇÃO DIRETA 11
1.2 EQUAÇÕES SEPARÁVEIS 12
1.2.1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS REDUTÍVEIS À SEPARÁVEIS 16
1.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EXATAS 18
1.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES 20
1.4.1 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO 20
1.4.2 EQUAÇÃO DE BERNOULLI 24
EXERCÍCIOS 27
2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM 30
2.1 EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS - DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR DAS SOLUÇÕES 30
2.1.1 EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTAN-TES 32
2.1.2 ESTUDO DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA 33
2.2 MÉTODO DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS PARA UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL NÃO HOMOGÊNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES 36
2.3 REDUÇÃO DE ORDEM 41
EXERCÍCIOS 44



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

INTRODUÇÃO

Nossa proposta principal neste trabalho é adquirir habilidades técnicas na solução de alguns tipos-padrão de equações diferenciais para os quais existem métodos de rotina que permitem encontrar a solução. Não iremos considerar questões como continuidade, demonstrações de teoremas, diferenciabilidade, a possível eliminação de divisores, etc. Os métodos aqui desenvolvidos requerem considerável experiência com técnicas de integração.

DEFINIÇÕES

Uma equação que envolve uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas é camada de **Equação Diferencial**.

Exemplos:

1) $\frac{dy}{dx} - 2x = 0$

2) $\ln \frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 1$

3) $2y''' + y''.\cos x - 2xy = 0$

4) $(y'')^3 + 2y(y')^7 - y^4 = 0$

5) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

Equação Diferencial Ordinária

Quando existe apenas uma variável independente. Exemplos: de 1 a 4 acima; onde y é a variável dependente e x a independente (uma só variável dependente).

Equação Diferencial de Derivadas Parciais

Quando há mais de uma variável livre. Exemplo: 5 acima; y é variável dependente, x e t independente.

Ordem da Equação Diferencial

É a ordem da derivada de mais alta ordem na equação. Exemplo: 1 é equação diferencial ordinária de 1ª ordem (derivada 1ª). Exemplos: 2, 4, 5 são de 2ª ordem. Exemplo 3 é de 3ª ordem (derivada 3ª).

SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Uma solução ou Integral de uma equação diferencial é uma função que substituída na equação a verifica, isto é, transforma-a numa identidade.

Exemplo:

$$\frac{dy}{dx} - 2x = 0 \quad \text{(I)}$$

Solução:

A função $y = x^2 + c$ é a solução da equação diferencial dada. Veja que derivando a solução e substituindo em na equação diferencial, verifica-se a equação.

A solução geral é a solução da equação que contém tantas constantes arbitrarias quantas forem as unidades da ordem da equação.

Exemplo: Equação diferencial de 1ª ordem: 1 (uma) constante

$$y' - 2x = 0 \Rightarrow y = x^2 + c_1$$

Equação diferencial de 2ª ordem: 2 (duas) constantes

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \Rightarrow y = c_1 . e^{2x} + c_2 . e^{3x}$$

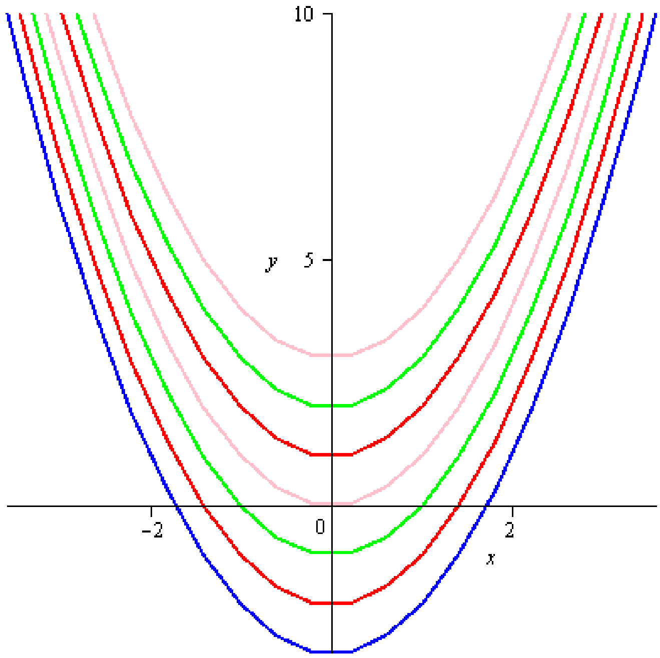
A solução que contém a constante arbitraria c é chamada de *solução geral* da equação diferencial. Atribuindo-se valores particulares a constante *c*, temos a *solução particular*.

Exemplo: $y = x^2 + c$ é *solução geral* da equação (I)

Dada uma *condição inicial*: $x = 1$ para $y = 2$, ou seja, $y(1) = 2$, temos: $2 = 1^2 + c$, donde $c = 1$. Portanto $y = x^2 + 1$ é solução particular para a condição dada.

A solução geral geometricamente representa uma família de curvas dependentes do parâmetro *c*, chamadas *curvas integrais.*

No exemplo anterior $y = x^2 + c$ é uma família de parábolas



A solução particular é uma curva da família das curvas integrais, dependendo do valor do parâmetro *c.*

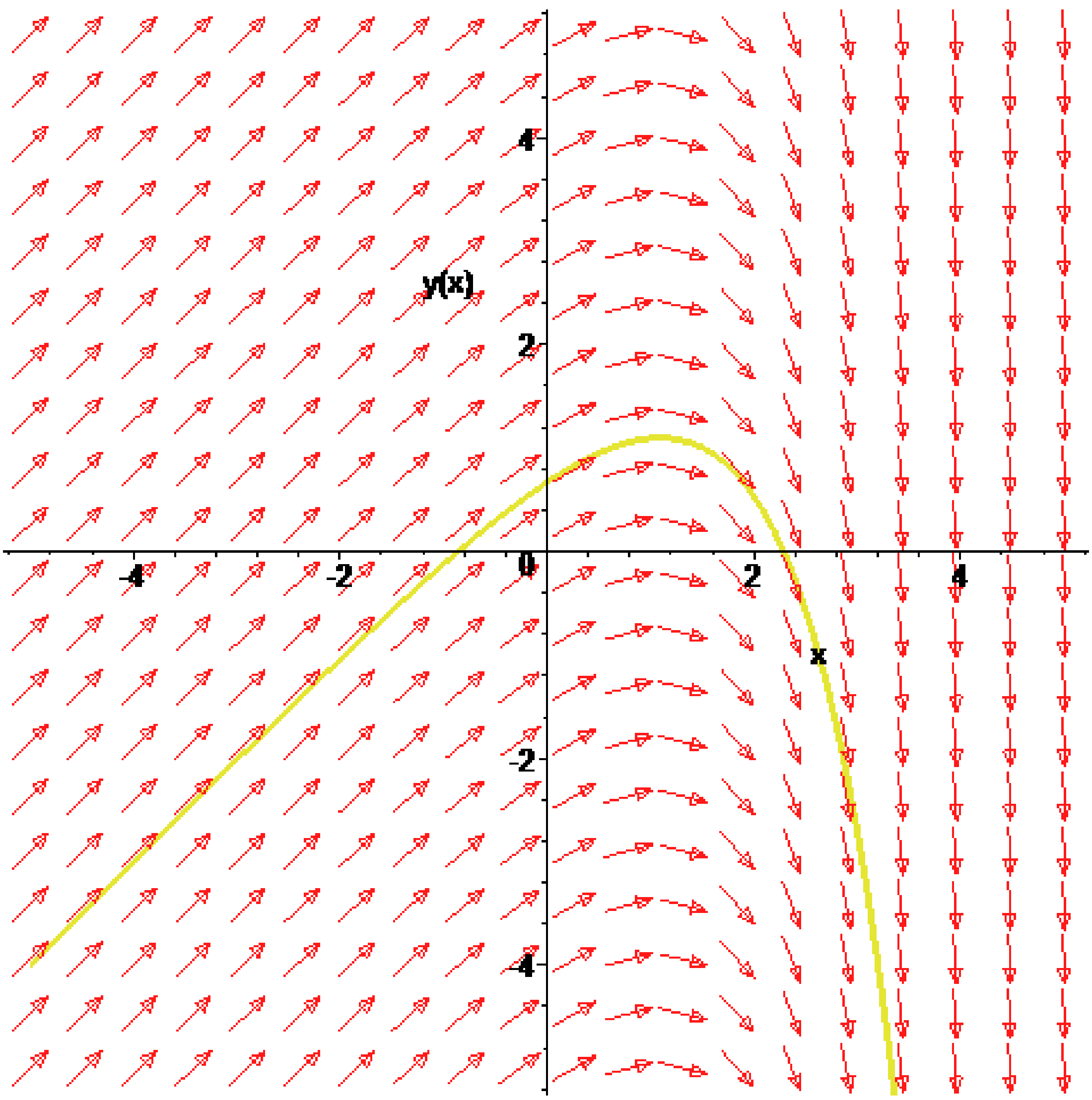
Solução singular é a solução da equação que não pode ser deduzida da solução geral. Apenas alguns tipos de equações apresentam essa solução.

CAMPO DE DIREÇÕES

Seja formar a equação diferencial de 1ª ordem da família de curvas: $y = (x+1) - \frac{1}{3}e^x + C$. Derivando, vem $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{3}e^x$ é a equação diferencial.

Ao derivar achamos a direção da reta tangente a curva no ponto (x, y) como temos uma família de curvas, podemos dizer que a *equação diferencial, geometricamente,* define *campos de direções que é o lugar geométrico dos pontos para os quais as tangentes as curvas da família conservam a mesma direção.*

Na figura abaixo, temos o campo de direções da equação $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{3}e^x$ e uma solução particular que passa pelo ponto $(0, \frac{2}{3})$



1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

A *forma padrão* de uma equação diferencial de primeira ordem na função incógnita *y(x)* é

$$y' = f(x, y) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

1.1 SOLUÇÃO POR INTEGRAÇÃO DIRETA

A equação diferencial de primeira ordem $y' = f(x, y)$ toma uma forma particularmente simples se a função *f* for independente da variável dependente y:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad (1.1)$$

Neste caso especial, só precisamos integrar ambos os lados da equação (1.1)

$$\int dy = \int f(x)dx \qquad (1.2)$$

Para obter

$$y = \int f(x)dx + C \qquad (1.3)$$

Isto é uma **solução geral** da Eq. (1), significando que envolve uma constante (número real) C, e para cada escolha de C temos uma **solução particular** da equação diferencial. Se G(x) for uma antiderivada particular de f(x) (isto é, se G'(x)=f(x)) então

$$y(x) = G(x) + C \qquad (1.4)$$

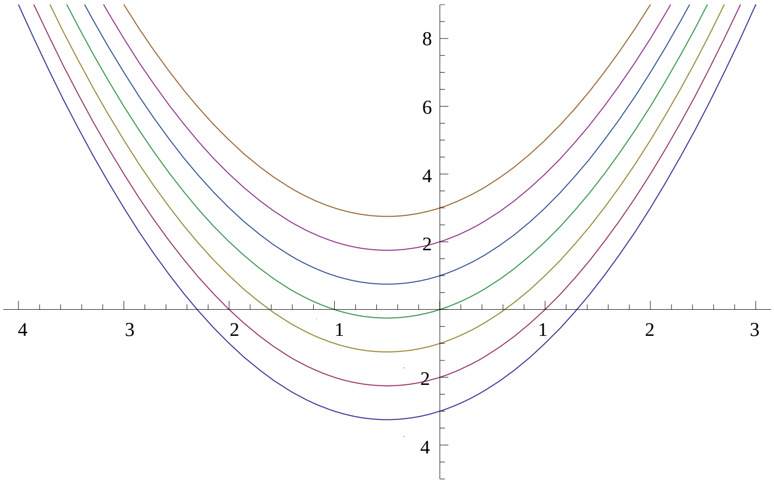
Para satisfazer uma **condição inicial** $y(x_0) = y_0$, só precisamos substituir $x = x_0$ e $y = y_0$ na Eq. (1.4) para obter $y_0 = G(x_0) + C$, de modo que $C = y_0 - G(x_0)$. Com esta escolha de C obtemos a **solução particular** de (1) satisfazendo o **problema de valor inicial**

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

Exemplo: Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 1, \quad y(1) = 5$$

Fazendo $dy = (2x+1)dx$ e integrando $\int dy = \int (2x+1)dx$, temos $y = x^2 + x + C$ (solução geral). Substituindo os valores x=1 e y=5, obtemos C=3, logo $y = x^2 + x + 3$ (solução particular).



1.2 EQUAÇÕES SEPARÁVEIS

A solução de uma equação diferencial de primeira ordem separável

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

é

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

onde C representa uma constante arbitrária.

Exemplos: Dar a solução geral das equações abaixo.

1. $\frac{dy}{dx} = 2x^2 - 3, \; y(0) = 2$:

$dy = (2x^2 - 3)dx$, integrando $\int dy = \int 2x^2 dx - \int 3dx$

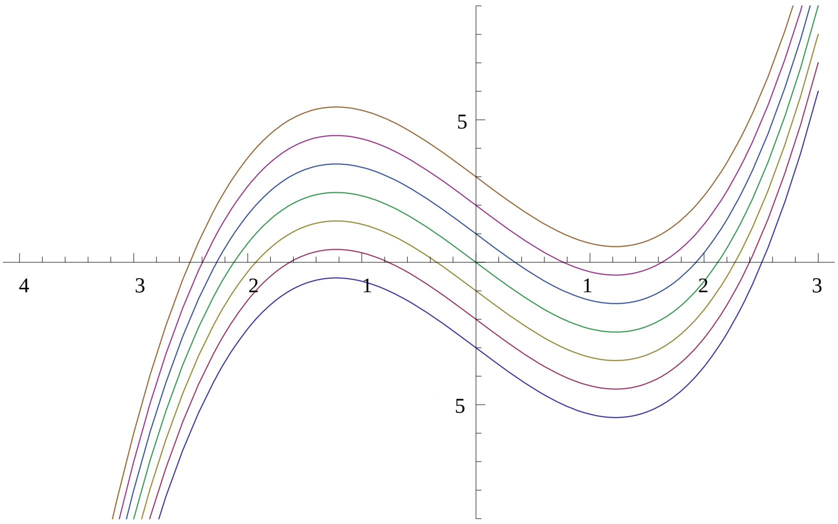
$$y + c_1 = 2\frac{x^3}{3} + c_2 - 3x + c_3$$

Em se tratando de equação de 1ª ordem, a solução geral tem apenas uma constante, então:

$$y = 2\frac{x^3}{3} - 3x + c_2 + c_3 - c_1 \quad \text{ou} \quad y = 2\frac{x^3}{3} - 3x + C$$

Solução particular para x= 0 e y = 2: Substituindo na solução geral, temos C = 2.

$$y = 2\frac{x^3}{3} - 3x + 2$$



2. $xdy - ydx = 0$, y(3) =12

$$xdy = ydx \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Integrando: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$, temos

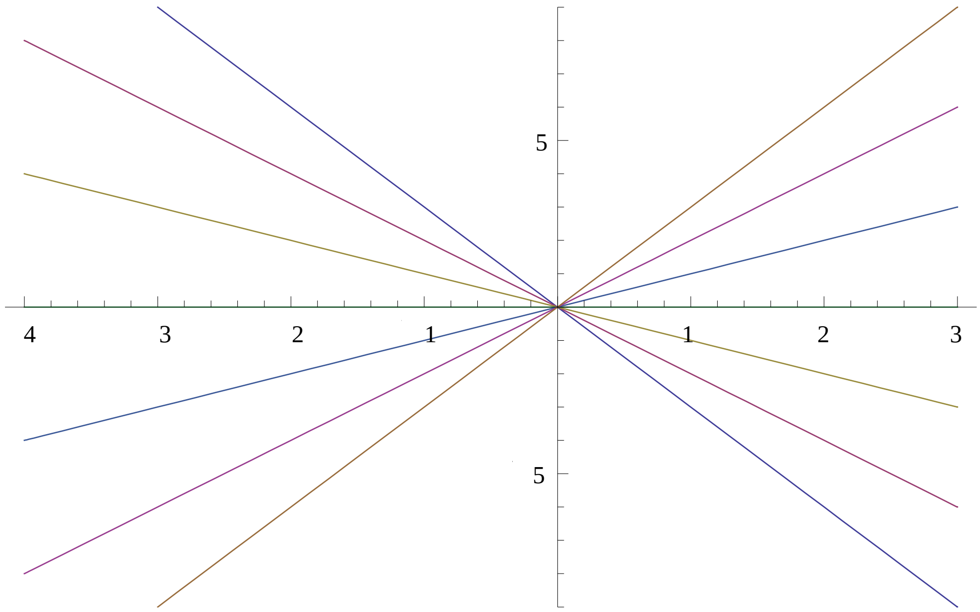
$$\ln y = \ln x + \ln c,$$

usamos $\ln c$ ao invés de C para facilitar a simplificação da solução:

$$\ln y = \ln c.x \text{ ou } y = C.x$$

Substituindo os valores x=3 e y = 12 na solução geral, temos C = 4.

Assim, $y = 4x$



3. $(1-x^2)ydy - \frac{x}{e^y}dx = 0$, $y(0) = 0$

$$\underset{\text{(I)}}{\int e^y . ydy} = \underset{\text{(II)}}{\int \frac{xdx}{1-x^2}}$$

I. $\int e^y . ydy$, por partes $\begin{cases} u = y \to du = dy \\ dv = e^y dy \to v = e^y \end{cases}$,

$\int udv = u.v - \int v.du$, temos:

$$\int e^y . y . dy = y . e^y - \int e^y . dy = y . e^y - e^y + c_1$$

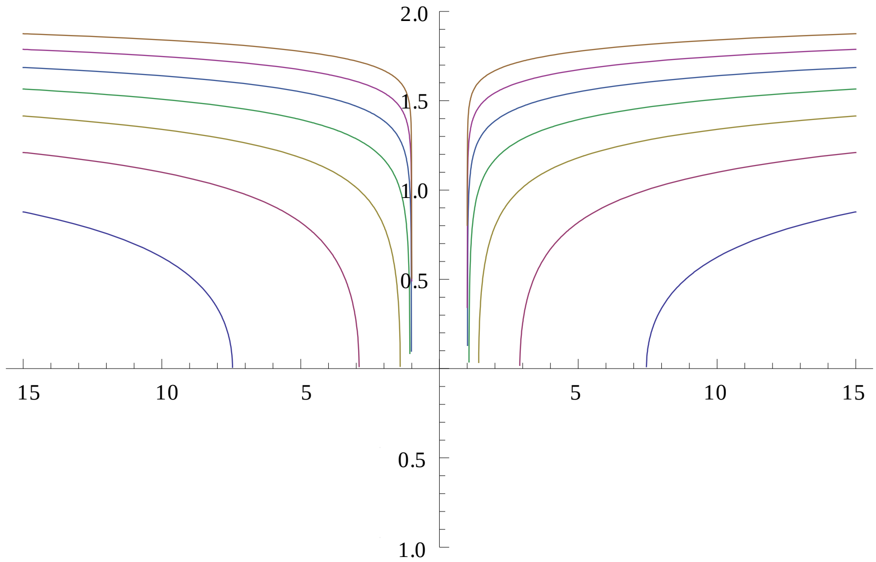
II. Fazendo substituição de variável, temos: $u = 1 - x^2$, $du = -2xdx$

$$\int \frac{xdx}{1-x^2} = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\ln u + c_2 = \ln(1-x^2)^{-1/2} + c_2$$

A solução geral é: $e^y(y-1) = \ln(1-x^2)^{-1/2}$ +C.

Substituindo x= 0 e y = 0 na solução geral, temos C = -1.

Assim, $e^y(y-1) = \ln(1-x^2)^{-1/2}$ - 1.



4. $(1 - x^2).\cos(3y)dy - 7dx = 0,\ y(1) = \frac{\pi}{2}$

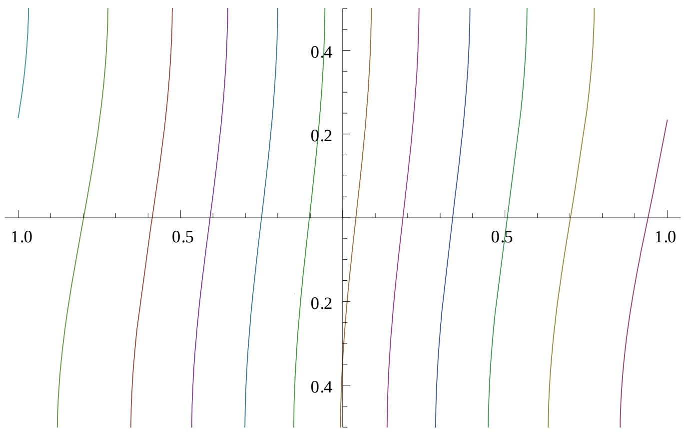
$$\cos(3y)dy = \frac{7dx}{1 + x^2}$$

$$\int \cos(3y)dy = 7.\int \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$\frac{1}{3}.\text{sen}(3y) = 7.arc\ tgx + C$$

Substituindo $x = 1$ e $y = \frac{\pi}{2}$, temos $C = \frac{-(21\pi + 4)}{12}$

$$\frac{1}{3}.\text{sen}(3y) = 7.arc\ tgx + \frac{-(21\pi + 4)}{12}$$



1.2.1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS REDUTÍVEIS À SEPARÁVEIS

É toda equação do tipo:

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (Equações Homogêneas)

$$\frac{dy}{dx} = f(x+y)$$

$\frac{dy}{dx} = f(x-y)$, entre outras.

O método consiste em efetuar uma mudança de variável:

$$\frac{y}{x} = u \qquad \text{ou} \qquad x+y=u \qquad \text{ou} \qquad x-y=u$$

fazendo $u = f(x)$, troca-se, então, a variável y por u, e a equação fica reduzida a forma separável.

Exemplos:

1. Dar a solução geral da equação: $y' = (x+y)^2$

Soluções

Fazendo: $x + y = u = \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} + 1$ ou $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$

Levando, na equação:

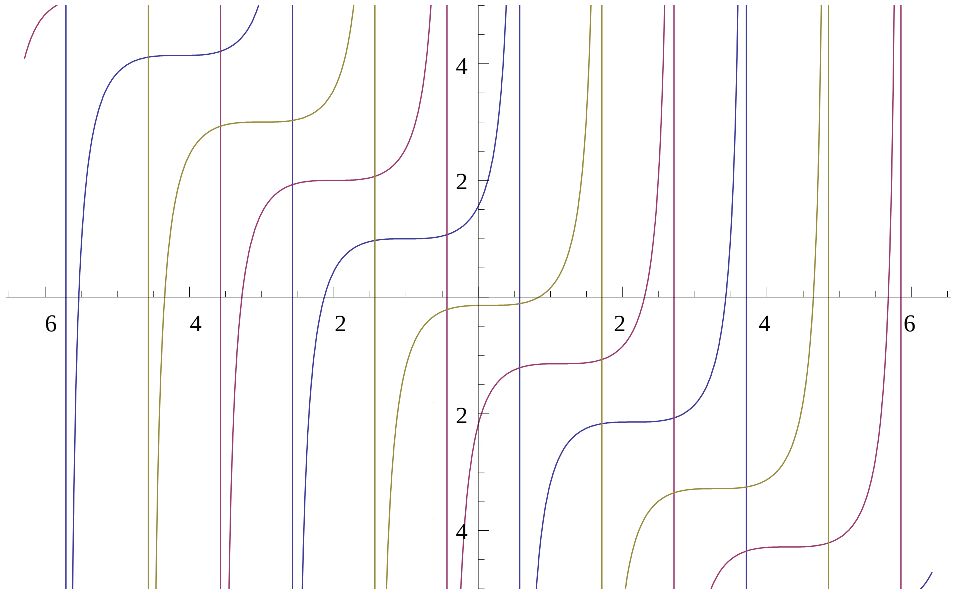
$\frac{du}{dx} - 1 = u^2$ ou $\frac{du}{dx} = u^2 + 1$

Separando variáveis e integrando:

$\int \frac{du}{u^2+1} = \int dx \Rightarrow arc\ tg\ u = x + c$ ou $tg(x+c) = u$;

substituindo u por $x+y$ virá:

$$y + x = tg(x+c)$$



2. Dar a solução geral de: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}$

Solução: Para se ter a equação do tipo $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, dividimos a fração do 2º membro por x^2:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2+y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}} \quad (*)$$

Fazendo: $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u.x$ ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}.x + u, \text{ levando em } \quad (*)$$

Virá: $\frac{du}{dx}.x + u = \frac{1+u^2}{u}$

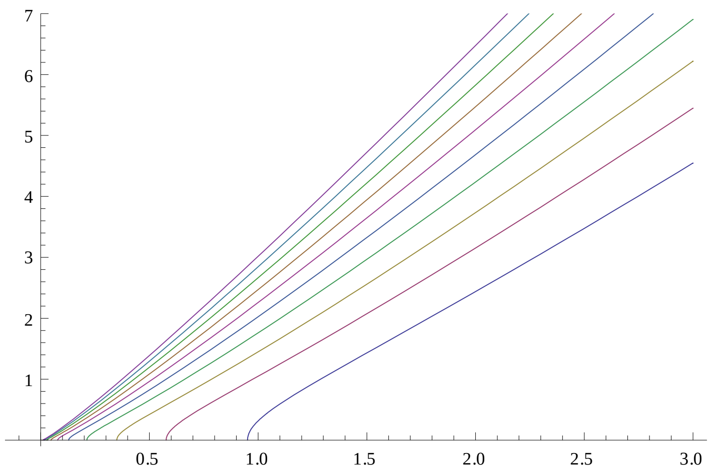
ou $\frac{du}{dx}.x = \frac{1+u^2}{u} - u$

$\frac{du}{dx}.x = \frac{1+u^2-u^2}{u} = \frac{1}{u}$

Separando as variáveis e integrando, virá:

$$\int u.du = \int \frac{dx}{x}$$

ou $\frac{u^2}{2} = \ln x + c$, substituindo u, virá: $\frac{(y/x)^2}{2} = \ln x + c$



1.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EXATAS

Uma equação diferencial na forma $M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0$ onde M e N são funções contínuas que apresentam derivadas parciais de primeira ordem contínuas, será exata se e somente se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Exemplo:

A equação: $(x^2 - y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

tem $M(x,y) = x^2 - y^2$ e $N(x,y) = -2xy$, logo:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2y$$

Observe que M é multiplicada por dx na equação e é derivada em relação a y e N é multiplicado por dy e é derivada em relação a x.

Se a equação $M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0$ é exata, então, existe uma função $f = f(x,y)$, primitiva, cujo diferencial é o primeiro membro da equação dada, isto é: $df = Mdx + Ndy$ (I), logo $df = 0$ então $f = k$ (constante).

A resolução da equação consiste em determinar a função f, cujo diferencial total é o primeiro membro da equação dada.

Ora pela definição de diferencial total, temos: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ (II)

Comparando (I) com (II), temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

Para determinar f basta integrar, **uma** das derivadas e determinar a constante que será uma função de x ou de y dependendo da escolha.

Exemplo:

Dar a solução geral da equação:

$$(x^2 - y^2)dx - 2xy\,dy = 0$$

Verificação se a equação é exata:

$$\begin{cases} M = x^2 - y^2 \\ N = -2xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -2y$$

Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - y^2 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy. \qquad (*)$$

Partindo da derivada de f em relação a x virá:

$$\int_x \frac{\partial f}{\partial x}.dx = \int_x (x^2 - y^2)dx = \frac{x^3}{3} - y^2x + g(y)$$

A constante é uma função de y, pois ao integrarmos em relação a x, qualquer função de y é constante.

Então, temos:

$$f = \frac{x^3}{3} - y^2x + g(y)\,(**)$$

Para determinarmos $g(y)$ derivamos (**) em relação a y:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2yx + g'(y)$$

e, igualamos a (*)

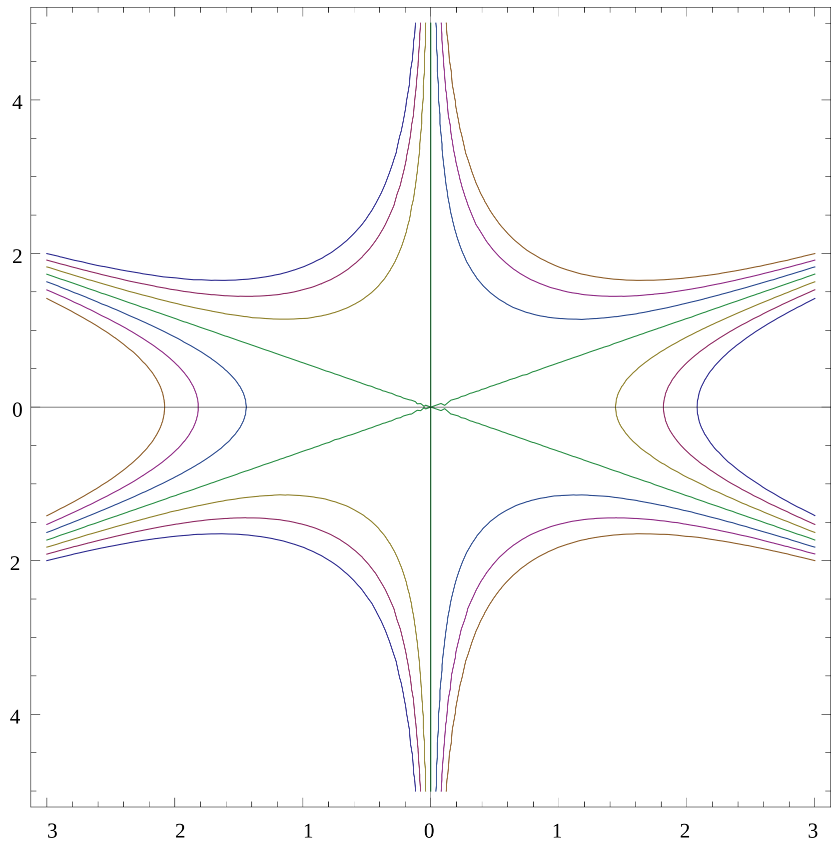
$$-2yx + g'(y) = -2xy$$

$$\therefore g'(y) = 0 \text{ ou } g(y) = c$$

Levando em (**) temos a solução da equação:

$$f = \frac{x^3}{3} - y^2x + c \text{, como } f \text{ também é } \textit{constante}:$$

$$k = \frac{x^3}{3} - y^2x + c \quad \text{ou} \quad \frac{x^3}{3} - y^2x + c_1 = 0$$



1.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Considere uma equação diferencial na forma padrão $y' = f(x, y)$. Se $f(x, y)$ puder ser escrita como $f(x, y) = -P(x)y + Q(x)$, então a equação diferencial é *linear*

$$y' + P(x)y = Q(x). \qquad (5.1)$$

Equações diferenciais de primeira ordem podem sempre ser expressas como em (5.1).

1.4.1 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

1º Caso: Se a equação é homogênea isto é, $q(x) = 0$, logo: $\frac{dy}{dx} + p(x).y = 0$.

Método: A resolução se faz com a separação de variável:

Ex.: $\frac{dy}{dx} - xy = 0$; separando e integrando:

$\frac{dy}{dx} = xy$ ou $\int \frac{dy}{y} = \int x.dx$ e $\ln y = \frac{x^2}{2} + c_1$.

2º Caso: A equação não é homogênea $q(x) \neq 0$.

1º Método: *Variação dos Parâmetros*

A solução y da equação $y' + p(x).y = q(x)$ é dada pelo produto: $y = y_1.u$. Sendo y_1 a solução da equação homogênea correspondente e u o parâmetro obtido substituindo $y = y_1.u$ e sua derivada na equação linear dada.

Exemplo: Dar a solução geral da equação linear:

$y' - \frac{2}{x}.y = x^2.\cos(3x)$.

Solução

i. Cálculo de y_1 (toma-se a equação homogênea correspondente isto é:

$y_1' - \frac{2}{x}.y_1 = 0$ (recaímos no 1º caso, aplica-se a separação e integra)

$\frac{dy_1}{dx} = \frac{2}{x}.y_1$ ou $\int \frac{dy_1}{y_1} = 2.\int \frac{dx}{x}$ donde $y_1 = x^2$

ii. Cálculo de u (a solução geral é $y = u.y_1$ ou $y = u.x^2$)

Substitui na equação y e y', isto é: $y = u.x^2$ e $y' = u'.x^2 + u.2x$;

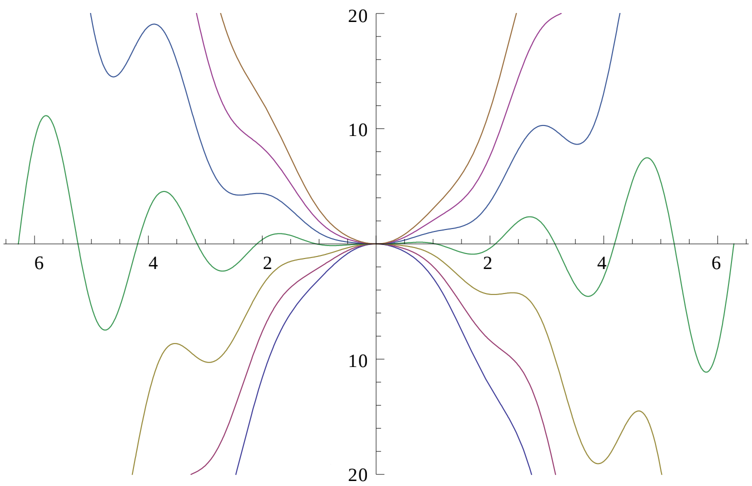
Levando na equação dada virá: $u'.x^2 + 2xu - \frac{2}{x}ux^2 = x^2.\cos(3x)$

$u'.x^2 + 2xu - 2xu = x^2.\cos(3x)$

$u'.x^2 = x^2.\cos(3x)$ ou $\frac{du}{dx} = \cos(3x)$,

então: $u = \frac{1}{3}\text{sen}(3x) + c$

Finalmente, a solução geral $y = u.y_1$ é $y = \left(\frac{1}{3}\text{sen}(3x) + c.x2\right.$



2º Método: *Uso do Fator Integrante*

Vamos resolver a equação

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

Multiplicando os dois lados por uma função positiva $\mu(x)$ que transforma o lado esquerdo na derivada do produto $\mu(x).y$. Logo mais, mostraremos como determinar μ, mas, primeiro, queremos mostrar que uma vez que μ esteja determinada, como ela fornece a solução que procuramos.

Veremos por que multiplicar por $\mu(x)$ dá certo:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + P(x)\mu(x)y = \mu(x)Q(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\mu(x).y) = \mu(x)Q(x)$$

$$\mu(x).y = \int \mu(x)Q(x)dx$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)Q(x)dx \qquad (2)$$

A equação (2) expressa a solução da equação (1) em termos das funções $\mu(x)$ e $Q(x)$. A função $\mu(x)$ é chamada **fator integrante** para a equação (1), pois sua presença faz que a equação seja integrável.

Por que a fórmula para $P(x)$ não aparece também na solução? Ela aparece sim, mas indiretamente, na construção da função positiva $\mu(x)$.

Temos que

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu\frac{dy}{dx} + Py\mu \quad \text{(condição imposta sobre } \mu \text{)}$$

$$\mu\frac{dy}{dx} + y\frac{d\mu}{dx} = \mu\frac{dy}{dx} + Py\mu \quad \text{(regra do produto para derivada)}$$

$$y\frac{d\mu}{dx} = Py\mu$$

A última equação será válida se

$$\frac{d\mu}{dx} = P\mu$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = Pdx$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int P dx$$

$$\ln \mu = \int P dx$$

$$\mu = e^{\int P(x)dx} \qquad (3)$$

Portanto, uma fórmula para a solução geral da Equação (1) é dada pela equação (2), onde $\mu(x)$ é dada pela Equação (3). Entretanto, em vez de decorar a fórmula, lembre-se apenas de como encontrar o fator integrante quando você tem a forma-padrão na qual $P(x)$ é identificada corretamente.

Para resolver a equação linear $y' + P(x)y = Q(x)$, multiplique os dois lados pelo fator integrante $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ e integre os dois lados.

Nesse procedimento, quando você integra o produto no lado esquerdo, sempre obtém o produto $\mu(x)y$ do fator integrante pela função solução y, devido à definição de μ

A Equação (2) pode ser resumida da seguinte forma

$$y = e^{-h}\left[\int e^{h}\, Q(x)dx + c\right. \text{ , onde } h = \int P(x)dx$$

Exemplo:

Dar a solução geral da equação linear, usando o fator integrante:

$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x - 2;$ $\mathrm{p}(x) = -\frac{1}{x}$ e $\mathrm{q}(x) = x - 2$

Solução: Calculando o fator integrante, temos:

$$I = e^{\int -\frac{1}{x}dx} \Rightarrow e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = \frac{1}{x}$$

Escrevendo a equação linear na forma de diferencial:

$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x - 2;$ multiplicando a equação por dx

$$dy - \frac{y}{x}dx = (x-2)dx$$

$$\left(2 - x - \frac{y}{x}\right)dx + dy = 0$$

Multiplicando pelo fator integrante a equação se transforma em exata:

$$\left(\frac{2}{x} - 1 - \frac{y}{x^2}\right) dx + \frac{1}{x} dy = 0$$

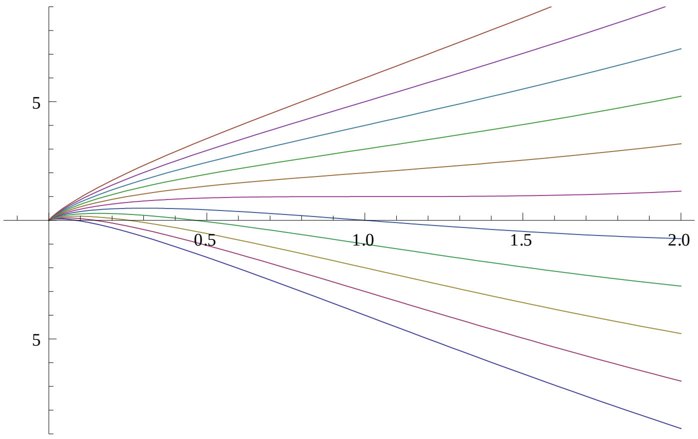
Resolvendo:

$f = \int_y \frac{1}{x} dy = \frac{1}{x} . y + g(x) \quad (*)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} + g'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{y}{x^2}$

donde $g'(x) = \frac{2}{x} - 1$ ou $g(x) = 2 \ln x - x$ voltando em (*), sabendo-se que $f = c\ (const.)$ e substituindo $g(x)$, virá:

$c = \frac{y}{x} + 2 \ln x - x.$



1.4.2 EQUAÇÃO DE BERNOULLI

É toda a equação da forma $\frac{dy}{dx} + p(x). y = q(x). y^n$ onde p e q são funções de x e n uma constante qualquer diferente de zero.

Dividindo por y^n, vem:

$$y^{-n}. \frac{dy}{dx} + p(x). y^{1-n} = q(x) \qquad (*)$$

Fazendo uma mudança de variável:

$z = y^{1-n}$, onde: $\frac{dz}{dx} = (1-n) y^{-n}. \frac{dy}{dx}$,

Levando em (*), teremos uma equação linear; em z:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)pz = (1-n)q$$

Exemplo:

Resolver a equação $3.\frac{dy}{dx}.\operatorname{sen} x - 2y.\cos x \frac{2}{y^{1/2}}$

esta equação pode também ser escrita.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2\cos x}{3\operatorname{sen} x}.y = \frac{2}{3\operatorname{sen} x}.y^{-1/2}$$

dividindo por $y^{-1/2}$ o que equivale a multiplicar por $\sqrt{y}$, vem:

$$\sqrt{y}.\frac{dy}{dx} - \frac{2}{3}\operatorname{cotg}(x).y\sqrt{y} = \frac{2}{3}\operatorname{cosec}(x),$$

fazendo-se $z = y.\sqrt{y} = y^{3/2}$

substituindo na equação:

$\frac{2}{3}\frac{dz}{dx} - \frac{2}{3}\operatorname{cotg} x.z = \frac{2}{3}\operatorname{cosec} x$, dividindo por $\frac{2}{3}$

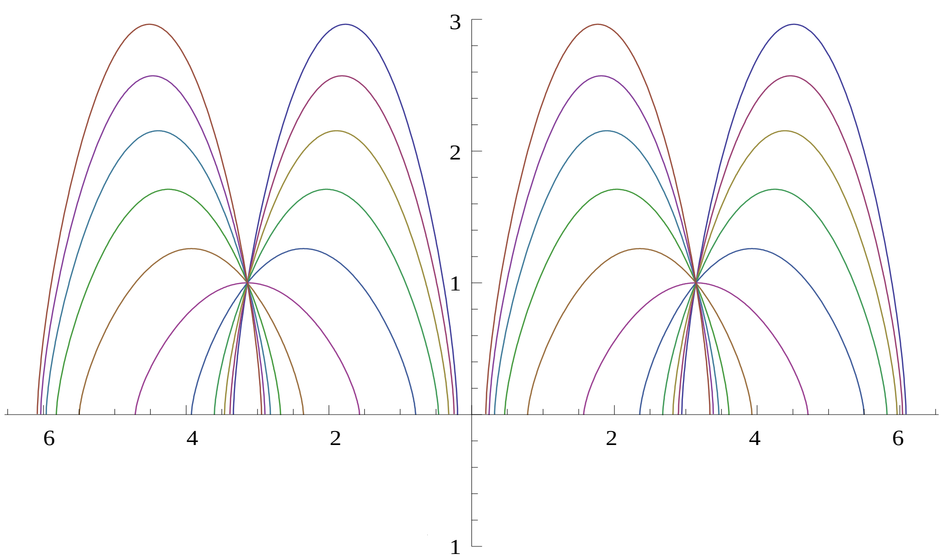
$\frac{dz}{dx} - \operatorname{cotg} x.z = \operatorname{cosec} x$ que é uma equação linear em z,

cuja solução é

$$z = c.\operatorname{sen} x - \cos x$$

donde, finalmente:

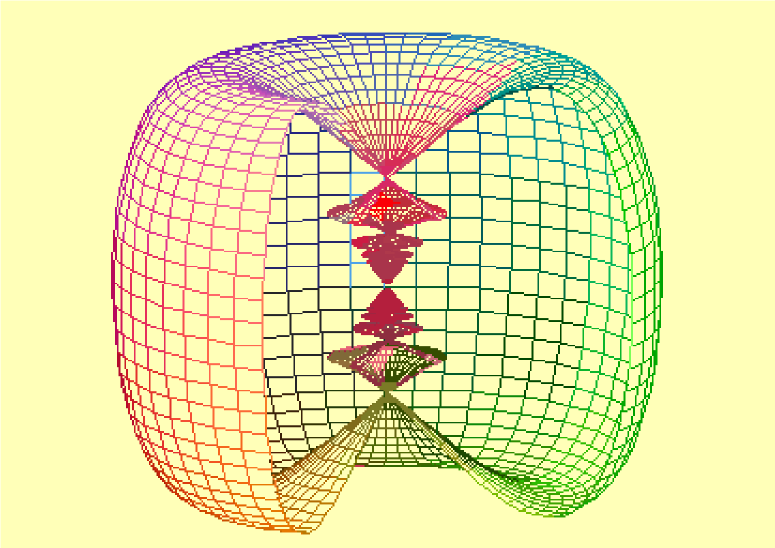
$$y = z^{2/3} = \sqrt[3]{(C\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$$



Nota Histórica 1. A história das Equações Diferenciais começa com os inventores do cálculo, Fermat, Newton, e Leibniz. A partir do momento que estes matemáticos brilhantes tiveram entendimento suficiente e notação para a derivada, esta logo apareceu em equações e o assunto nasceu. Contudo, logo descobriram que as soluções para estas equações não eram tão fáceis. As manipulações simbólicas e simplificações algébricas ajudaram apenas um pouco. A integral (antiderivada) e seu papel teórico no Teorema Fundamental do Cálculo ofereceu ajuda direta apenas quando as variáveis eram separadas, em circunstâncias muito especiais. O método de separação de variáveis foi desenvolvido por Jakob Bernoulli e generalizado por Leibniz. Assim estes pesquisadores iniciais do século 17 focalizaram estes casos especiais e deixaram um desenvolvimento mais geral das teorias e técnicas para aqueles que os seguiram.

Ao redor do início do século 18, a próxima onda de pesquisadores de equações diferenciais começou a aplicar estes tipos de equações a problemas em astronomia e ciências físicas. Jakob Bernoulli estudou cuidadosamente e escreveu equações diferenciais para o movimento planetário, usando os princípios de gravidade e momento desenvolvidos por Newton. O trabalho de Bernoulli incluiu o desenvolvimento da catenária e o uso de coordenadas polares. Nesta época, as equações diferenciais estavam interagindo com outros tipos de matemática e ciências para resolver problemas aplicados significativos. Halley usou os mesmos princípios para analisar a trajetória de um cometa que hoje leva seu nome. O irmão de Jakob, Johann Bernoulli, foi provavelmente o primeiro matemático a entender o cálculo de Leibniz e os princípios de mecânica para modelar matematicamente fenômenos físicos usando equações diferenciais e a encontrar suas soluções. Ricatti (1676--1754) começou um estudo sério de uma equação em particular, mas foi limitado pelas teorias do seu tempo para casos especiais da equação que leva hoje seu nome. Os Bernoullis, Jakob, Johann, e Daniel, todos estudaram os casos da equação de Ricatti também. Na época, Taylor usou séries para "resolver" equações diferenciais, outros desenvolveram e usaram estas séries para vários propósitos. Contudo, o desenvolvimento de Taylor de diferenças finitas começou um novo ramo da matemática intimamente relacionado ao desenvolvimento das equações diferenciais. No início do século 18, este e muitos outros matemáticos tinham acumulado uma crescente variedade de técnicas para analisar e resolver muitas variedades de equações diferenciais. Contudo, muitas equações ainda eram desconhecidas em termos de propriedades ou métodos de resolução. Cinqüenta anos de equações diferenciais trouxeram progresso considerável, mas não uma teoria geral.

http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/thomas_br/chapter1/medialib/custom3/topics/diffeq.htm



EXERCÍCIOS

Em cada um dos problemas 1-10 verifique primeiro que $y(x)$ satisfaz a equação diferencial dada. Determine então o valor da constante C de modo que $y(x)$ satisfaça a condição inicial.

1. $y'+y=0;\ y(x)=Ce^{-x},\ y(0)=2$
2. $y'=2;\ y(x)=Ce^{2x},\ y(0)=3$
3. $y'=y+1;\ y(x)=Ce^{x}-1,\ y(0)=5$
4. $y'=x-y;\ y(x)=Ce^{-x}+x-1,\ y(0)=10$
5. $y'+3x^2y=0;\ y(x)=Ce^{-x^3},\ y(0)=7$
6. $e^{y}y'=1;\ y=\text{In}(x+C),\ y(0)=0$
7. $x\dfrac{dy}{dx}+3y=2x^5;\ y(x)=\frac{1}{4}x^5+Cx^{-3},\ y(2)=1$
8. $xy'-3y=x^3;\ y(x)=x^3(C+\text{In}\,x),\ y(0)=17$
9. $y'=3x^2(y^2+1);\ y(x)=\tan(x^3+C),\ y(0)=1$
10. $y'+y\tan x=\cos x;\ y(x)=(x+C)\cos x,\ y(\pi)=0$

Em cada um dos problemas 1-10 ache uma função $y=f(x)$ que satisfaça a equação diferencial e a condição inicial prescrita.

1. $\dfrac{dy}{dx}=2x+1;\ y(0)=3$
2. $\dfrac{dy}{dx}=(x-2)^3;\ y(2)=1$
3. $\dfrac{dy}{dx}=x^{1/2};\ y(4)=0$
4. $\dfrac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2};\ y(1)=5$
5. $\dfrac{dy}{dx}=(x+2)^{-1/2};\ y(2)=-1$
6. $\dfrac{dy}{dx}=x(x^2+9)^{1/2};\ y(-4)=0$
7. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{10}{x^2+1};\ y(0)=0$
8. $\dfrac{dy}{dx}=\cos 2x;\ y(0)=1$
9. $\dfrac{dy}{dx}=(1-x^2)^{-1/2};\ y(0)=0$

10. $\frac{dy}{dx} = xe^{-x}; y(0) = 1$

Encontre soluções gerais (implícitas, se necessário; explícitas, se conveniente) das equações diferenciais nos problemas 1-18. (*y'* denota a derivada de *y* em relação a *x*)

1. $y' + 2xy = 0$

2. $y' + 2xy^2 = 0$

3. $y' = y\ senx$

4. $(1+x)y' = 4y$

5. $2\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$

6. $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{xy}$

7. $\frac{dy}{dx} = (64xy)^{1/3}$

8. $\frac{dy}{dx} = 2x\sec y$

9. $(1-x^2)\frac{dy}{dx} = 2y$

10. $(1-x)^2\frac{dy}{dx} = (1+y)^2$

11. $\frac{dy}{dx} = xy^3$

12. $y\frac{dy}{dx} = x(y^2+1)$

13. $y^3\frac{dy}{dx} = (y^4+1)\cos x$

14. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}$

15. $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)y^5}{x^2(2y^3-y)}$

16. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}$

17. $\frac{dy}{dx} = 1+x+y+xy$

18. $x^2y' = 1-x^2+y^2-x^2y^2$

Encontre soluções particulares explícitas dos problemas de valor inicial nos problemas 19-26.

19. $\frac{dy}{dx} ye^x; y(0) = 2e$

20. $\frac{dy}{dx} 3x^2(y^2+1); y(0) = 1$

21. $2y\frac{dy}{dx} = x(x^2-16)^{-1/2}; y(5) = 2$

22. $\frac{dy}{dx} = 4x^3y - y; y(1) = -3$

23. $\frac{dy}{dx} + 1 = 2y; y(1) = 1$

24. $y'\tan g = y; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

25. $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2y; y(1) = 1$

26. $\frac{dy}{dx} = 2xy^2 + 3x^2y^2; y(1) = -1$

Em cada um os problemas 1-12, verifique que a equação diferencial dada é exata e então a resolva.

1. $(2x+3y)dx + (3x+2y)dy = 0$

2. $(4x-y)dx + (6y-x)dy = 0$

3. $(3x^2+2y^2)dx + (4xy+6y^2)dy = 0$

4. $(2xy^2+3x^2)dx + (2x^2y+4y^3)dy = 0$

5. $\left(x^3+\dfrac{x}{y}\right)dx+(y^2+\text{In}\,x)dy=0$

6. $(1+ye^{xy})dx+(2y+xe^{xy})dy=0$

7. $(\cos x+\text{In}\,y)dx\left(\dfrac{x}{y}+e^y\right)dy=0$

8. $(x+\tan^{-1}y)dx+\dfrac{x+y}{1+y^2}dy=0$

9. $(3x^2y^3+y^4)dx+(3x^3y^2+y4^{+}4xy^3)dy=0$

10. $(e^x seny+\tan y)dx+(e^x\cos y+x\sec^2 y)dy=0$

11. $\left(\dfrac{2x}{y}-\dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx+\left(\dfrac{2y}{x^3}-\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{1}{y^{1/2}}\right)dy=0$

12. $\dfrac{2x^{5/2}-3y^{5/3}}{2x^{5/2}y^{2/3}}dx+\dfrac{3y^{5/3}-2x^{5/2}}{3x^{3/2}y^{5/3}}dy=0$

Encontre soluções gerais para as equações diferenciais nos problemas 1-30. Observe que y' denota derivada com relação a x.

1. $(x+y)y'=x-y$

2. $2xyy'=x^2+2y^2$

3. $xy'=y+2(xy)^{1/2}$

4. $(x-y)y'=x+y$

5. $x(x+y)y'=y(x-y)$

6. $(x+2y)y'=y$

7. $xy^2y'=x^3+y^3$

8. $x^2y'=xy+x^2e^{y/x}$

9. $x^2y'=xy+y^2$

10. $xyy'=x^2+3y^2$

11. $(x^2-y^2)y'=2xy$

12. $xyy'=y^2+x(4x^2+y^2)^{1/2}$

13. $xy'=y+(x^2+y^2)^{1/2}$

14. $yy'+x=(x^2+y^2)^{1/2}$

15. $x(x+y)y'+y(3x+y)=0$

16. $y'=(x+y+1)^{1/2}$

17. $y'=(4x+y)^2$

18. $(x+y)y'=1$

19. $x^2y'+2xy=5y^3$

20. $y^2y'+2xy^3=6x$

21. $y'=y+y^3$

22. $x^2y'+2xy=5y^4$

23. $xy'+6y=3xy^{4/3}$

24. $2xy'+y^3e^{-2x}=2xy$

25. $y^2(xy'+y)(1+x^4)^{1/2}=x$

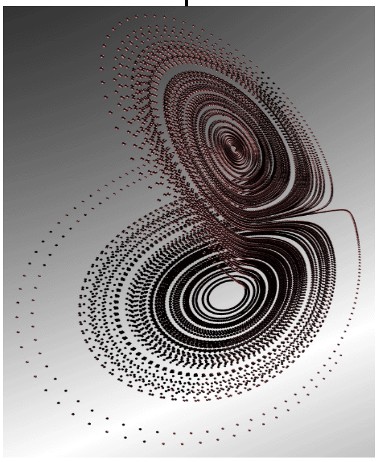
26. $3y^2y'+y^3=e^{-x}$

27. $3xy^2y'=3x^4+y^3$

28. $xe^yy'=3x^4+y^3$

29. $(2x\,sen\,y\cos y)y'=4x^2+3sen^2y$

30. $(x+e^y)y'=xe^{-y}-1$



2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Seja a equação diferencial linear de segunda ordem

$$A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=F(x) \qquad (2.1.1)$$

onde as funções coeficientes A, B, C e F são contínuas no intervalo aberto I. Iremos admitir que $A(x)\neq 0$ em cada ponto de I, de forma que podemos dividir cada termo em (2.1.1) por A(x) e escrevê-lo na forma

$$y''+p(x)y+q(x)y=f(x) \qquad (2.1.2)$$

- Se $p(x)$ e $q(x)$ são constantes, então temos a equação diferencial de coeficientes constantes.
- Se $f(x)=0$, temos a equação *homogênea*.

Pelo fato de que, uma vez resolvida a equação homogênea, sempre é possível resolver a equação não-homogênea correspondente ou, pelo menos expressar sua solução em função de uma integral, o problema de resolver a equação homogênea é o mais fundamental

2.1 EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS - DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR DAS SOLUÇÕES

Duas funções linearmente dependentes (LD) ou linearmente independentes (LI) se, dadas as duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$,tivermos:

$\frac{y_1}{y_2}=K\ (const.)$ (LD)

$\frac{y_1}{y_2} \neq K\ (const.)$ (LI)

Exemplo:

1) $\begin{matrix} y_1=3x \\ y_2=x \end{matrix} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{3x}{x} = 3$ (LD)

2) $\begin{matrix} y_1=e^{2x} \\ y_2=e^{x} \end{matrix} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x$ (LI)

Proposição: Se duas funções y_1 e y_2 são LD, então o determinante $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0$.

Verificação: Se y_1 e y_2 são LD então $y_1 = K.y_2$ e $y_1' = K.y_2'$ donde:
$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ky_2 & y_2 \\ Ky_2' & y_2' \end{vmatrix} = Ky_2y_2' - Ky_2'y_2 = 0$

Este determinante é chamado de ***WRONSKIANO.***

Teorema 1-Princípio de Superposição: Sejam y_1 e y_2 duas soluções da equação diferencial homogênea $y'' + p(x)y + q(x)y = 0$ no intervalo I. Se c_1 e c_2 são constantes, então a combinação linear $y = c_1y_1 + c_2y_2$ é também uma solução da equação.

Exemplo:

Se $y_1 = \cos x$ e $y_2 = \operatorname{sen} x$ são soluções particulares da equação $y'' + y = 0$, então $y = c_1.\operatorname{sen} x + c_2.\cos x$, também é solução da equação.
Observe que $\frac{y_1}{y_2} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot x \neq const.$ (LI).

Teorema 2-Wronskiano de Soluções: Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções da equação $y'' + p(x)y + q(x)y = 0$ num intervalo aberto I no qual p e q são contínuas.

(a) Se y_1 e y_2 são LD, então $W(y_1, y_2) = 0$ em I;

(b) Se y_1 e y_2 são LI, então $W(y_1, y_2) \neq 0$ em cada ponto de I.

Teorema 3-Soluções Gerais: Sejam y_1 e y_2 duas soluções LI da equação homogênea $y''+p(x)y+q(x)y=0$ com p e q são contínuas no intervalo aberto I. Se Y é qualquer solução da equação, então existem números c_1 e c_2 tais que $Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ para todo x em I.

Em resumo, o que o Teorema 3 nos diz é que quando encontramos duas soluções LI da equação homogênea, então encontramos ***todas*** as suas soluções.

2.1.1 EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTAN-TES

Consideremos a equação diferencial linear de segunda ordem homogênea

$$ay''+by+cy=0 \qquad (2.2.1.1)$$

com os coeficientes a, b e c constantes e $a \neq 0$. Procuraremos inicialmente uma única solução desta equação e começamos com a observação de que

$$(e^{rx})' = re^{rx} \quad \text{e} \quad (e^{rx})'' = r^2e^{rx}$$

assim qualquer derivada de e^{rx} é um múltipo constante de e^{rx}. Portanto, se substituíssemos $y = e^{rx}$ na equação (2.2.1.1), cada termos seria um múltiplo constante de e^{rx}, com os coeficientes constantes dependentes de r e dos coeficientes a, b e c . Isto sugere que tentemos encontrar um valor de r de modo que esses múltiplos de e^{rx} tenham soma nula. Se isso for possível, então y = e^{rx} será uma solução de (2.2.1.1).

Tomando a equação diferencial $ay'' + b\,y' + cy = 0$, e fazendo as substituições:

$$\begin{cases} y = e^{rx} \\ y' = r.e^{rx} \\ y'' = r^2.e^{rx} \end{cases}$$

$teremos$

$$e^{rx}(a.r^2 + b.r + c) = 0 \quad e \quad a.r^2 + b.r + c = 0$$

Como $e^{rx} \neq 0$, concluímos que $y(x)=e^{rx}$ satisfará a equação diferencial (2.2.1.1) precisamente quando r é uma raiz da equação algébrica

$$a.r^2 + b.r + c = 0.$$

Esta equação quadrática é denominada ***equação característica*** da equação diferencial linear homogênea

$$ay'' + by + cy = 0.$$

2.1.2 ESTUDO DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA

1º Caso: $r_1 \neq r_2$, $\Delta > 0$ raízes reais e distintas as soluções particulares serão

$$y_1 = c_1.e^{r_1 x} \text{ e } y_2 = c_2.e^{r_2 x},$$

que são LI, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{c_1}{c_2}.e^{(r_1+r_2)x} \neq const.$

Portanto, a solução geral será dada por:

$$y = c_1.e^{r_1 x} + c_2.e^{r_2 x}$$

Exemplo:

$y'' - 5y' + 6y = 0 \Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0$, $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$

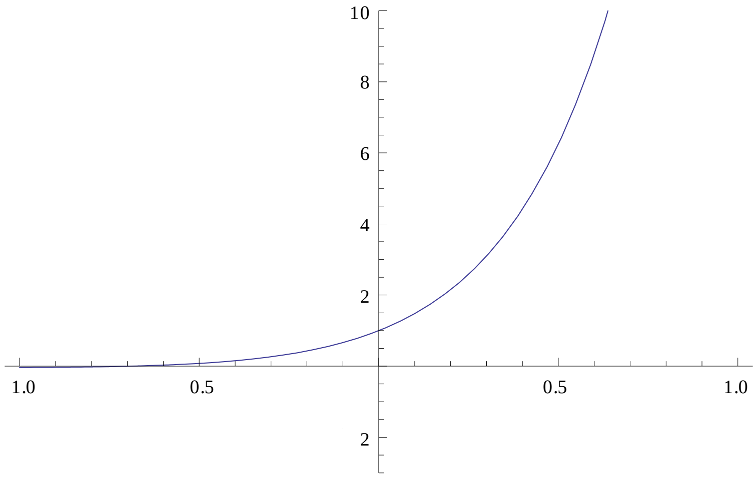
logo $y = c_1.e^{2x} + c_2.e^{3x}$

Condições iniciais: y(0) =1 e y'(0)=4

Temos: $y = c_1.e^{2x} + c_2.e^{3x}$ e $y' = 2c_1.e^{2x} + 3c_2.e^{3x}$

Fazendo substituições, temos: c_1 =-1 e c_2 = 2.

Solução particular: $y = 2e^{3x} - e^{2x}$



2º Caso: $\begin{cases} r_1 = a + b_i \\ r_2 = a - b_i \end{cases}$, isto é $\Delta < 0$, raízes complexas conjugadas.

Logo as soluções particulares são $\begin{cases} y_1 = e^{(a+b_i)x} \\ y_2 = e^{(a-b_i)x} \end{cases}$

Como são LI a solução geral é:

$$y = c_1 . e^{(a+b_i)x} + c_2 . e^{(a-b_i)x} \text{ ou } y = e^{ax} . \left(c_1 . e^{bix} + c_2 . e^{-bix}\right)$$

Empregando a fórmula de Euler:

$$\begin{cases} e^{bix} = \cos bx + i \operatorname{sen} bx \\ e^{-bix} = \cos bx - i \operatorname{sen} bx \end{cases}$$

Substituindo na solução geral :

$$y = e^{ax} . [c_1(\cos bx + i \operatorname{sen} bx) + c_2(\cos bx - i \operatorname{sen} bx)]$$

ou

$$y = e^{ax} . [(c_1 + c_2) \cos bx + (c_1 - c_2) i \operatorname{sen} bx]$$

Fazendo $c_1 + c_2 = C_1$ e $(c_1 - c_2)i = C_2$,

$$y = e^{ax} . (C_1 \cos(bx) + C_2 \operatorname{sen}(bx))$$

Exemplo:

Dar a solução geral da equação diferencial:

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \qquad y(0) = 1 \text{ e } y'(0) = 2$$

$\Delta = 2^2 - 4.1.5 = 4 - 20 = -16$

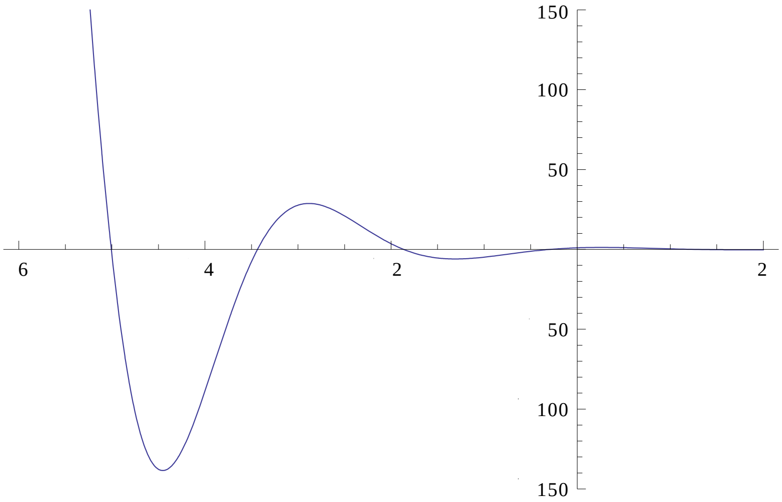
$r = \frac{-2 \pm 4i}{2} \rightarrow r_1 = -1 + 2i$ e $r_2 = -1 - 2i$

donde: $y = e^{-x} . (C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x))$

Fazendo as substituições das condições iniciais, temos:

$C_1 = 1$ e $C_2 = 3/2$.

Solução particular: $y = e^{-x} . (\cos(2x) + 3/2 \operatorname{sen}(2x))$.



3º Caso: $r_1 = r_2$, *isto* é $\Delta = 0$, raízes repetidas.

As soluções particulares são:

$$y_1 = c_1 e^{r_1 x} \text{ e } \quad y_2 = c_2 e^{r_1 x}$$

Não são LI porque $\frac{y_1}{y_2} = \frac{c_1}{c_2} = const.$

Portanto, temos uma única solução particular que é $y = c.e^{r_1 x}$. O problema neste caso é produzir a segunda solução, da equação diferencial. O teorema a seguir nos mostra a solução para este caso.

Teorema 4 –Raízes Repetidas: Se a equação característica tem raízes reais iguais $r_1 = r_2$, então

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{r_1 x}$$

é uma solução geral da equação homogênea.

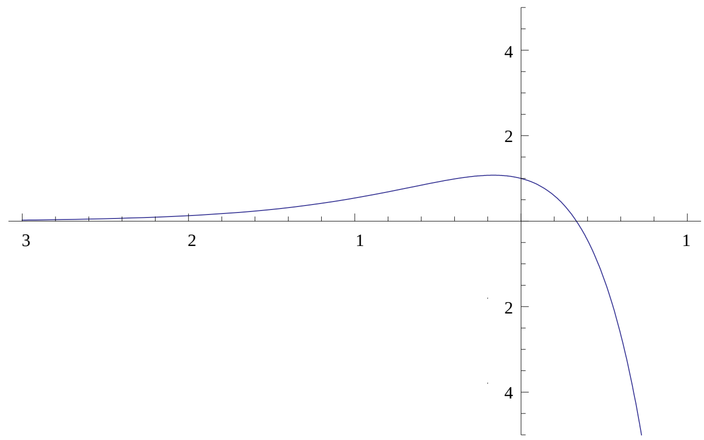
Exemplo: Dar a solução geral de $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$

Solução: $r^2 - 4r + 4 = 0,\quad r_1 = r_2 = 2 \Rightarrow y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$

Fazendo as substituições dos valores iniciais, temos:

$c_1 = 1$ e $c_2 = -3$

Solução particular: $y = (1 - 3x)e^{2x}$



2.2 MÉTODO DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS PARA UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL NÃO HOMOGÊNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES

Vamos considerar a equação *não* homogênea

$$y'' + by' + cy = g(x) \qquad (2.2.1)$$

Vamos supor que conhecemos a solução geral $y_h = c_1.y_1 + c_2.y_2$ da equação homogênea associada $y'' + by' + cy = 0$.

A idéia principal é substituir as constantes c_1 e c_2 por funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$, respectivamente, logo

$$y = u_1(x).y_1 + u_2(x).y_2 \qquad (2.2.2)$$

Podemos, então, tentar determinar $u_1(x)$ e $u_2(x)$ de modo que y seja solução da equação não homogênea.

Impondo condições a u_1 e u_2 podemos ter y como solução da equação dada. Derivamos y para substituir na Eq. (2.2.1),

$y = u_1.y_1 + u_2.y_2$

$y' = u_1'.y_1 + u_1.y_1' + u_2'.y_2 + u_2.y_2'$

Impondo a condição:

$$u_1'.y_1 + u_2'.y_2 = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

Derivando mais uma vez, obtemos

$y'' = u_1'.y_1' + u_1.y_1'' + u_2'.y_2' + u_2.y_2''$

Substituindo y, y' e y'' na Eq. (2.2.1) e rearrumando os termos da equação resultante, temos

$$u_1(y_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(y_2'' + by_2' + cy_2) + u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x) \quad (2.2.3)$$

Cada uma das expressões entre parênteses na Eq. (2.4.3) é nula, pois ambas as funções y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea. Portanto a equação se reduz a

$$u_1'.y_1' + u_2'.y_2' = g(x) \qquad \text{(II)}$$

As equações (I) e (II) formam um sistema de duas equações lineares algébricas para as derivadas u_1' e u_2' das funções desconhecidas.

Formando o sistema com as equações, podemos determinar u_1 e u_2.

$$\begin{cases} u_1'.y_1 + u_2'.y_2 = 0 \\ u_1'.y_1' + u_2'.y_2' = g(x) \end{cases}$$

Aplicando a regra de *CRAMER* virá

$$u_1' = -\frac{y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)} \qquad \text{e} \qquad u_2' = \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)}$$

O sistema sempre terá solução, pois o wronskiano $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$, visto que y_1 e y_2 são LI

Integrando, encontramos as funções desejadas, isto é,

$$u_1 = -\int \frac{y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)} dx + k_1 \qquad \text{e} \qquad u_2 = \int \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)} dx + k_2$$

Exemplo:

1) Dar a solução geral da equação: $y'' - 3y' + 2y = e^x.\operatorname{sen} x$, y(0) =-1 e y'(0)=1

Solução:

a) Solução da homogênea associada $y'' - 3y' + 2y = 0$

Equação característica $\Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} r_1 = 1 \\ r_2 = 2 \end{matrix}$

$y_h = c_1.e^x + c_2.e^{2x}$

b) Cálculo do y_p; variando os parâmetros:

$y_p = u_1.e^x + u_2.e^{2x}$, derivando para substituir na eq. diferencial.

$y_p' = \boldsymbol{u_1'.e^x} + u_1.e^x + \boldsymbol{u_2'.e^{2x}} + 2u_2.e^{2x}$

Impondo a condição: $u_1'.e^x + u_2'.e^{2x} = 0 \qquad$ (I)

$y_p' = u_1.e^x + 2u_2.e^{2x}$

$y_p'' = u_1'.e^x + u_1.e^x + 2u_2'.e^{2x} + 4u_2.e^{2x}$

Substituindo na eq. dada, virá:

$$\underbrace{u_1'.e^x + u_1.e^x + 2u_2'.e^{2x} + 4u_2.e^{2x}}_{y_p''} - 3\underbrace{(u_1.e^x + 2u_2.e^{2x})}_{y_p'} + 2\underbrace{(u_1.e^x + u_2.e^{2x})}_{y_p} = e^x.\operatorname{sen} x$$

Evidenciando u_1 e u_2 virá:

$$u_1\underbrace{(e^x - 3e^x + 2e^x)}_{0} + u_2\underbrace{(4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x})}_{0} + u_1'.e^x + 2u_2'.e^{2x} = e^x.\operatorname{sen} x$$

$\therefore u_1'.e^x + 2u_2'.e^{2x} = e^x.\operatorname{sen} x \qquad$ (II)

Formando um sistema com (I) e (II):

$$\begin{cases} u_1'.e^x + u_2'.e^{2x} = 0 \\ u_1'.e^x + 2u_2'.e^{2x} = e^x.\operatorname{sen} x \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por Cramer, virá:

$$u_1' = \frac{-e^{3x}.\operatorname{sen} x}{e^{3x}} = -\operatorname{sen} x$$

$$\therefore u_1' = -\operatorname{sen} x \Rightarrow u_1 = \cos x$$

$$u_2' = \frac{e^{2x}.\operatorname{sen} x}{e^{3x}} = e^{-x}.\operatorname{sen} x$$

$$\therefore u_2' = e^{-x}.\operatorname{sen} x \xRightarrow{(Por\ Parte)} u_2 = -\frac{e^{-x}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

A solução particular é:

$$y_p = u_1.e^x + u_2.e^{2x}$$

$$y_p = \cos x\,.\,e^x + \left[-\frac{e^{-x}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x).e^{2x}\right]$$

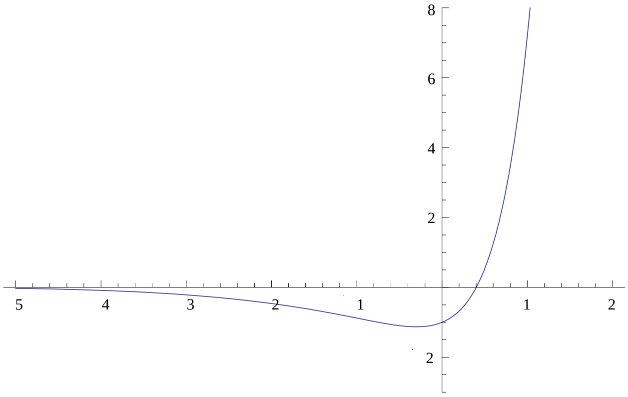
$$y_p = \cos x\,.\,e^x - \frac{e^{-x}}{2}\operatorname{sen} x - \frac{e^{-x}}{2}\cos x$$

$$y_p = \frac{e^x}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

E a solução geral: $y = c_1.e^x + c_2.e^{2x} + \frac{e^x}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)$

Fazendo as substituições, obtemos: c_1 =-4 e c_2=5/2.

Solução particular: $y = -4e^x + 5/2e^{2x} + \frac{e^x}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)$



2) Dar a solução geral: $y'' + y = \operatorname{tg} x$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$

Solução:

a) Solução da homogênea associada $y'' + y = 0$

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 + 1.i \\ r_2 = 0 - 1.i \end{cases} \qquad \begin{matrix} a = 0 \\ b = 1 \end{matrix}$$

$$y_h = e^{0x}(c_1.\cos x + c_2.\operatorname{sen} x)$$

$$y_h = c_1.\cos x + c_2.\operatorname{sen} x$$

b) Solução particular

$$y_p = u_1.\cos x + u_2.\operatorname{sen} x$$

$$y_p' = -u_1.\operatorname{sen} x + \boldsymbol{u_1'.\cos x + u_2'.\operatorname{sen} x} + u_2.\cos x$$

$$u_1'.\cos x + u_2'.\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$y_p'' = -u_1'.\operatorname{sen} x - u_1.\cos x + u_2'.\cos x - u_2.\operatorname{sen} x$$

Substituindo na equação diferencial dada:

$$\underbrace{-u_1'.\operatorname{sen} x - u_1.\cos x + u_2'.\cos x - u_2.\operatorname{sen} x}_{y_p''} + \underbrace{u_1.\cos x + u_2.\operatorname{sen} x}_{y_p} = \operatorname{tg} x$$

$$-u_1'.\operatorname{sen} x + u_2'.\cos x = \operatorname{tg} x \qquad \text{(II)}$$

Formando o sistema com as equações virá:

$$\begin{cases} u_1'.\cos x + u_2'.\operatorname{sen} x = 0 \\ -u_1'.\operatorname{sen} x + u_2'.\cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por CRAMER virá:

$$u_1' = \frac{-\operatorname{sen} x\,.\operatorname{tg} x}{1}$$

$$\therefore u_1' = -\operatorname{sen} x\,.\operatorname{tg} x \Rightarrow u_1 = -\int \operatorname{sen} x\,.\operatorname{tg} x\,.dx = -\int \operatorname{sen} x\,.\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.dx$$

$$u_1 = -\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}.dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}.dx$$

$$u_1 = \int \cos x\,.\,dx - \int \frac{1}{\cos x}.\,dx$$

$$\boxed{u_1 = \operatorname{sen} x - \ln_e |\sec x + \operatorname{tg} x|}$$

$$y_2' = \frac{\operatorname{sen} x}{1}$$

$$\therefore u_2' = \operatorname{sen} x \Rightarrow u_2 = -\cos x$$

Logo, y_p será igual a

$$y_p = u_1.\cos x + u_2.\operatorname{sen} x$$

$$y_p = (\operatorname{sen} x - \ln_e(\sec x + \operatorname{tg} x) + \cos x + (-\cos x).\operatorname{sen} x)$$

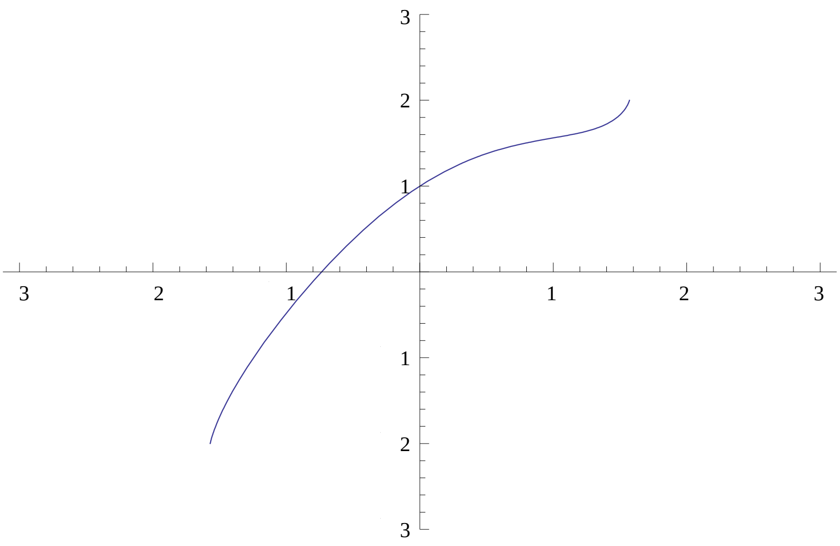
$$y_p = \operatorname{sen} x\,.\cos x - \ln\ |\sec x + \operatorname{tg} x| - \cos x\,.\operatorname{sen} x$$

A solução geral é:

$$y = c_1.\cos x + c_2.\operatorname{sen} x + \ln\ |\sec x + \operatorname{tg} x|$$

Substituindo, temos: $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$.

Solução particular: $y = \cos x + 2\operatorname{sen} x + \ln\ |\sec x + \operatorname{tg} x|$



2.3 REDUÇÃO DE ORDEM

Suponha que conhecemos uma solução y_1 não identicamente nula, de

$$y''+py'+qy=0 \qquad (2.2.1)$$

Para encontrar uma segunda solução, seja

$$y=vy_1 \qquad (2.2.2)$$

então

$$y'=v'y_1+vy_1'$$

e

$$y''=v''y_1+2v'y_1'+vy_1''$$

Substituindo essas expressões para *y, y' e y''* na Eq. (2.3.1) e arrumando os termos, encontramos

$$y_1v''+(2y_1'+py_1)v'+(y_1''+py_1'+qy_1)v=0 \qquad (2.2.3)$$

Como y_1 é uma solução da Eq. (2.3.1), o coeficiente d e v na Eq. (2.3.3) é zero, logo a Eq. (2.3.3) fica

$$y_1v''+(2y_1'+py_1)v'=0 \qquad (2.2.4)$$

A Eq.(2.2.4) é uma equação diferencial de primeira ordem para a função *v'*. Uma vez encontrada *v', v* é obtida por integração. A solução *y* é determinada da Eq. (2.3.2).

Esse procedimento é chamado de **método de redução de ordem**, já que o passo fundamental é a resolução de uma equação diferencial de primeira ordem para *v'*, em vez da equação de segunda ordem original para *y*.

O teorema seguinte formula este método.

Teorema 5: Redução de Ordem

Se $y_1(x)$ é uma solução da equação $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, num intervalo I onde p e q são contínuas e $y_1(x)$ é uma solução não nula, então uma segunda solução linearmente independente de $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ em I é dada por

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx \qquad (2.2.5)$$

Exemplo:

Dado que $y_1=t^{-1}$ é uma solução de $2t^2y'' + 3ty' - y = 0\ (t>0)$ encontre uma segunda solução linearmente independente, onde y(1)=0 e y'(1)=1

Solução: Vamos resolver sem fazer uso de (2.2.5), fazendo $y = vt^{-1}$; então

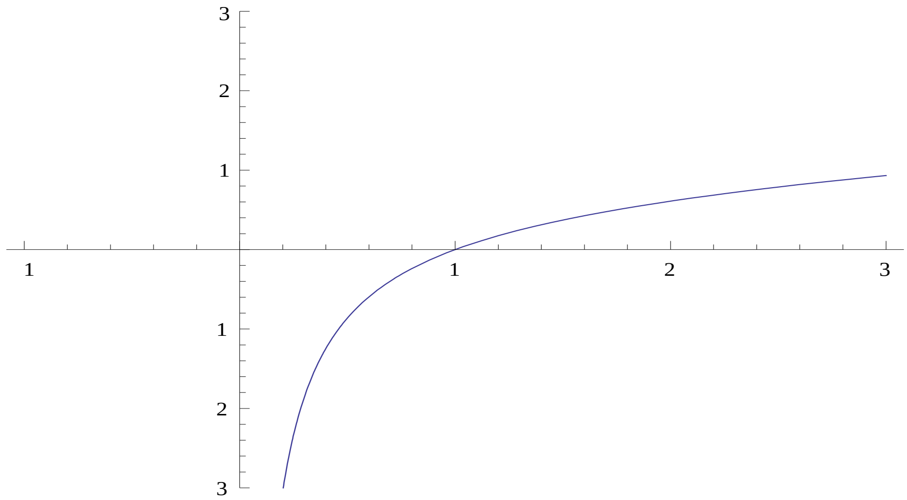
$y' = v't^{-1} - vt^{-2}$, $\quad y'' = v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-1}$

Substituindo y, y' e y'' na equação dada e arrumando os termos, obtemos

$2tv'' - v' + (4t^{-1} - 3t^{-1} - t^{-1})v = 0$ e $2tv'' - v' = 0$

Separando as variáveis e resolvendo para v' encontramos

$v' = ct^{\frac{1}{2}}$, então $v = \frac{2}{3}ct^{\frac{3}{2}} + k$. Segue que $y = c_1t^{\frac{1}{2}} + c_2t^{-1}$. Substituindo, temos $c_1 = 2/3$ e $c_2 = -2/3$. Solução particular: $y = \frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}t^{-1}$



Nota Histórica 2.O desenvolvimento das equações diferenciais precisava de um mestre para consolidar e generalizar os métodos existentes e criar novas e mais poderosas técnicas para atacar grandes famílias de equações. Muitas equações pareciam amigáveis, mas tornaram-se terrivelmente difíceis. Em muitos casos, técnicas de soluções iludiram perseguidores por cerca de 50 anos, quando Leonhard Euler chegou à cena das equações diferenciais. Euler teve o benefício dos trabalhos anteriores, mas a chave para seu entendimento era seu conhecimento e percepção de funções. Euler entendeu o papel e a estrutura de funções, estudou suas propriedades e definições. Rapidamente achou que funções eram a chave para entender equações diferenciais e desenvolver métodos para suas resoluções. Usando seu conhecimento de funções, desenvolveu procedimentos para soluções de muitos tipos de equações. Foi o primeiro a entender as propriedades e os papéis das funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e muitas outras funções elementares. Euler também desenvolveu várias funções novas baseadas em soluções em séries de tipos especiais de equações diferenciais. Suas técnicas de conjecturar e encontrar os coeficientes indeterminados foram etapas fundamentais para desenvolver este assunto. Em 1739, desenvolveu o método de variação de parâmetros. Seu trabalho também incluiu o uso de aproximações numéricas e o desenvolvimento de métodos numéricos, os quais proveram "soluções" aproximadas para quase todas as equações. Euler então continuou aplicando o trabalho em mecânica que levou a modelos de equações diferenciais e soluções. Ele era um mestre que este assunto necessitava para se desenvolver além de seu início primitivo, tornando-se um assunto coeso e central ao desenvolvimento da matemática aplicada moderna.

Depois de Euler vieram muitos especialistas que refinaram ou estenderam muitas das idéias de Euler. Em 1728, Daniel Bernoulli usou os métodos de Euler para ajudá-lo a estudar oscilações e as equações diferenciais que produzem estes tipos de soluções. O trabalho de D'Alembert em física matemática envolveu equações diferenciais parciais e explorações por soluções das formas mais elementares destas equações. Lagrange seguiu de perto os passos de Euler, desenvolvendo mais teoria e estendendo resultados em mecânica, especialmente equações de movimento (problema dos três corpos) e energia potencial. As maiores contribuições de Lagrange foram provavelmente na definição de função e propriedades, o que manteve o interesse em generalizar métodos e analisar novas famílias de equações diferenciais. Lagrange foi provavelmente o primeiro matemático com conhecimento teórico e ferramentas suficientes para ser um verdadeiro analista de equações diferenciais. Em 1788, ele introduziu equações gerais de movimento para sistemas dinâmicos, hoje conhecidas como equações de Lagrange. O trabalho de Laplace sobre a estabilidade do sistema solar levou a mais avanços, incluindo técnicas numéricas melhores e um melhor entendimento de integração. Em 1799, introduziu as idéias de um laplaciano de uma função. Laplace claramente reconheceu as raízes de seu trabalho quando escreveu "Leia Euler, leia Euler, ele é nosso mestre". O trabalho de Legendre sobre equações diferenciais foi motivado pelo movimento de projéteis, pela primeira vez levando em conta novos fatores tais como resistência do ar e velocidades iniciais. Lacroix foi o próximo a deixar sua marca. Trabalhou em avanços nas equações diferenciais parciais e incorporou muitos dos avanços desde os tempos de Euler ao seu livro. A contribuição principal de Lacroix foi resumir muitos dos resultados de Euler, Lagrange, Laplace, e Legendre. O próximo na ordem foi Fourier. Sua pesquisa matemática fez contribuições ao estudo e cálculos da difusão de calor e à solução de equações diferenciais. Muito deste trabalho aparece em *The Analytical Theory of Heat* (A Teoria Analítica do Calor,1822) de Fourier, no qual ele fez uso extensivo da série que leva seu nome. Este resultado foi uma ferramenta importante para o estudo de oscilações. Fourier, contudo, pouco contribuiu para a teoria matemática desta série, a qual era bem conhecida anteriormente por Euler, Daniel Bernoulli, e Lagrange. As contribuições de Charles Babbage vieram por uma rota diferente. Ele desenvolveu uma máquina de calcular chamada de Máquina de Diferença que usava diferenças finitas para aproximar soluções de equações.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

1. Considere um tanque usado em determinado experimentos hidrodinâmicos. Após um experimento, o tanque contém 200 litros de uma solução a uma concentração de 1 g/l. Para preparar para o próximo experimento, o tanque tem que ser lavado com água fresca entrando a uma taxa de 2 litros por minuto, a solução bem misturada saindo à mesma taxa. Encontre o tempo necessário para que a concentração de tinta no tanque atinja 1% de seu valor original.

2. Um tanque contém, inicialmente, 120 litros de água pura. Uma mistura contendo uma concentração de $\gamma\ g/l$ de sal entra no tanque a uma taxa de 2 l/min e a solução, bem misturada, sai do tanque à mesma taxa. Encontre uma fórmula,, em função de γ , para a quantidade de sal no tanque em qualquer instante *t*. Encontre, também, a quantidade de limite de sal no tanque quando $t \to \infty$.

3. Um tanque contém, originalmente, 100 galões (cerca de 455 litros) de água fresca. É despejada, então, água no tanque contendo ½ lb (cerca de 227 g) de sal por galão a uma taxa de 2 galões por minuto e a mistura sai do tanque à mesma taxa. Após 10 minutos, o processo é preparado e é despejada água fresca no tanque a uma taxa de 2 galões por min, com a mistura saindo, novamente, à mesma taxa. Encontre a quantidade de sal no tanque após mais 10 minutos.

4. Um tanque, com uma capacidade de 500 galões, contém, originalmente, 200 galões (cerca de 910 litros) de uma solução com água com 100 lb (cerca de 45,4 kg) de sal. Uma solução de água contendo 1 lb de sal por galão entra a uma taxa de 3 galões por minuto e permite-se que a mistura saia a uma taxa de 2 galões por minuto. Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante anterior ao instante em que o tanque começa a trasbordar. Encontre a concentração (em libras por galão) de sal no tanque quando ele está a ponto de transbordar. Compare essa concentração com o limite teórico de concentração se o tanque tivesse capacidade finita.

5. Um tanque contém 100 galões (cerca de 455 litros) de água e 50 onças (cerca de 1,42 kg) de sal. Água contendo uma concentração de sal de ¼ (1+1/2 sen *t*) oz/gal entra no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto e a mistura no tanque sai à mesma taxa.

a) Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante.
b) Desenhe a solução para um período de tempo suficientemente grande de modo que você possa ver o comportamento limite da solução.
c) O comportamento limite da solução é uma oscilação em torno de um determinado nível constante. Qual é esse nível? Qual a amplitude da oscilação?

6. Suponha que é investida uma quantia S_0 a uma taxa de rendimento anual r composto continuamente.

a) Encontre o tempo T necessário, em função de r, para a quantia determine original dobrar de valor.
b) Determine T se $r = 7\%$.
c) Encontre a taxa de rendimento que tem quer usada para que o investimento inicial dobre em 8 anos.

7. Um jovem, sem capital inicial, investe k reais por ano a uma taxa anual de rendimento r: suponha que os investimentos são feitos continuamente.

a) Determine a quantia $S(t)$ acumulada em qualquer instante t.
b) Se r = 7,5%, determine k de modo que esteja disponível R$1 milhão para a aposentadoria após 40 anos.
c) Se k = R$2000/ano, determine a taxa de rendimento r que precisa ser aplicada para se ter R$ 1 milhão após 40 anos.

8. Uma pessoa, ao se formar na faculdade, pega R$8000 emprestados para comprar um carro. A financeira cobra taxa de juros anuais de 10%. Supondo que os juros são compostos continuamente e que a pessoa faz pagamentos contínuos a uma taxa constante anual k, determine, também, o total de juros pagos durante o período de 3 anos.

9. Um comprador de imóvel não pode pagar mais que R$800/mês para o financiamento de sua casa própria. Suponha que a taxa de juros é de 9% ao ano e que o financiamento é de 20 anos. Suponha que os juros são compostos continuamente e que os pagamentos também são feitos continuamente.

a) Determine o empréstimo máximo que esse comprador pode pedir.
b) Determine os juros totais pagos durante todo o empréstimo.

10. Uma pessoa recém-chegada obteve um empréstimo de R$100.000 a uma taxa de 9% ao ano para comprar um apartamento. Antecipando aumentos regulares de salário, o comprador espera efetuar pagamentos, a uma taxa mensal de $800(1+t/120)$, onde t é o numero de meses desde que o empréstimo foi feito.

a) Supondo que essa programação possa ser mantida, quando o empréstimo estará liquidado?
b) Supondo o mesmo programa de pagamento, qual o empréstimo máximo que pode ser liquidado em exatamente 20 anos?

11. Uma ferramenta importante em pesquisa arqueológica é a datação por carbono radioativo desenvolvido pelo químico americano Willard F. Libby. Essa é uma maneira de determinar a idade de restos de certas madeiras e plantas, assim como de ossos, humanos ou de animais, ou de artefatos enterrados nos mesmos níveis. A datação por carbono radioativo é baseada no fato de que algumas madeiras ou plantas contêm quantidades residuais de carbono-14, um isótopo radioativo do carbono. Esse isótopo é acumulado durante a vida da planta e começa a decair na sua morte. Como a meia-vida do carbono é longa (aproximadamente 5730 anos), podem ser medidas quantidades remanescentes de carbono-14 após muitos milhares de anos. Mesmo que a fração da quantidade original de carbono-14 ainda presente seja muito pequena, através de medidas adequadas feitas em laboratório, a *proporção* da quantidade original de carbono-14 que permanece pode ser determinada precisamente. Em outras palavras, se $Q(t)$ é a quantidade de carbono-14 no instante t e se a quantidade Q_0 é a quantidade original, então a razão Q_t/Q_0 pode ser determinada, pelo menos se essa quantidade não for pequena demais. Técnicas atuais de medida permitem a utilização desse método para períodos de tempo até em torno de 50.000 anos ou mais.

a) Supondo que Q satisfaz a equação diferencial $Q' = -rQ$. determine a constante de decaimento r para o carbono-14.

b) Encontre uma expressão para $Q(t)$ em qualquer instante t se $Q\ \ 0\ = Q_0$.

c) Suponha que são descobertos certos restos de plantas nos quais a quantidade residual atual de carbono-14 é 20% da quantidade original. Determine a idade desses restos.

12. A população de mosquitos em determina área cresce a uma taxa proporcional à população atual e, na ausência de outros fatores, a população dobra a cada semana. Existem, inicialmente, 200.000 mosquitos na área e os predadores (pássaros, morcegos, etc) comem 20.000 mosquitos/dia. Determine a população de mosquitos na área em qualquer instante t.

13. Suponha que uma determinada população tem uma taxa de crescimento que varia com o tempo e que essa população satisfaz a equação diferencial

$$dy/dt = \ 0{,}5 + \ \text{sen}\, t\ \ y/5.$$

a) Se $y(0) = 1$, encontre (ou estime) o instante τ no qual a população dobra. Escolha outra condição inicial e determine se o tempo τ em que ela dobra depende da população inicial.

b) Suponha que a taxa de crescimento é substituída pelo seu valor médio 1/10. Determine o tempo τ nesse caso.

c) Suponha que a parcela sen t na equação diferencial é substituída por sen $2\pi\tau$, isto é, a variação na taxa de crescimento tem uma frequência substancialmente maior. Qual o efeito disto sobre o tempo em que a população dobra?

14. Suponha que uma determinada população satisfaz o problema de valor inicial

$$dy/dt = r(t)y - k, \quad y(0) = y_{0,}$$

Onde a taxa de crescimento $r(t)$ é dada por $r(t) = (1 + \ \text{sen}\, t)/5$ e k representa a taxa predatória.

a) Suponha que $k = 1/5$. Faça o gráfico de y em função de t para diversos valores de y_0 entre 1/2 e 1.

b) Estime a população inicial crítica y_c abaixo da qual a população se torna extinta.

c) Escolha outros valores para k e encontre o y_c correspondente para cada um deles.

15. A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto muda a uma taxa proporcional à diferença entre sua temperatura e a do ambiente que o rodeia. Suponha que a temperatura de uma xícara de café obedece à lei do resfriamento de Newton. Se o café estava a uma temperatura de 200° F, determine quando o café atinge a temperatura de 150°F.

16. Considere um lago de volume constante V contendo, no instante t, uma quantidade $Q(t)$ de poluentes, distribuídos uniformemente no lago, com uma concentração $c(t)$, onde $c(t) = Q(t)/V$. Suponha que entra no lago água contendo uma concentração k de poluentes a uma taxa r e que a água deixa o lago à mesma taxa. Suponha que os poluentes são, também, adicionados diretamente ao lago a uma constante P. Note que as hipóteses feitas negligenciam uma serie de fatores que podem ser importantes em alguns casos – por exemplo, a água adicionada ou perdida por precipitação, absorção ou evaporação; o efeito estratificador de diferenças de temperaturas em um lago profundo; a tendência de irregularidades na costa produzirem baías, protegidas; e o fato de que os poluentes não são depositados uniformemente no lago, mas (em geral) em pontos isolados de sua periferia. Os resultados a seguir têm quer interpretados levando-se em consideração que fatores desse tipo foram desprezados.

a) Se, no instante $t = 0$, a concentração de poluentes é c_0 encontre uma fórmula para a concentração $c\ \ t$ em qualquer instante t. Qual a concentração limite quando $t \to \infty$?

b) Se termina a adição de poluentes ao lago ($k = 0$ e $P = 0$ para $t > 0$), determine o intervalo de tempo T necessário para que a concentração de poluentes seja reduzida a 50% de seu valor original; e a 10% de seu valor original.

c) A tabela 2.3.2 contém dados para diversos lagos na região dos grandes lagos americanos. Usando esses dados, determine, do item (b), o tempo T necessário para reduzir a contaminação de CAD um desse lagos a 10% de seu valor original.

TABELA 2.3.2 Dados sobre volume e Fluxo nos grandes lagos Americanos		
Lago	$V\ \ km^3 \times 10^3$	$r\ \ km^3/\text{ano}$
Superior	12,2	65,2
Michigan	4,9	158
Erie	0,46	175
Ontário	1,6	209

17. Uma bola de massa 0,15 kg é atirada para cima com velocidade inicial de 20 m/s do teto de um edifício com 30 m de altura .

Despreze a resistência do ar.

a) Encontre a altura máxima, acima do chão, atingida pela bola.

b) Supondo que a bola não bate no prédio ao descer, encontre o instante em que ela atinge o solo.

c) Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ